Institut für Theoretische Physik | Universität Heidelberg
C. Ewerz, A. Samberg | Wintersemester 2013/14

9. Übung zur Elektrodynamik

Besprechung der Präsenzaufgaben: 16.–18.12.2013
Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 19.12.2013

S 42 Lorentz-Transformationen (12 Punkte)

Wir betrachten den $\mathbb{R}^{1,3}$ mit den Koordinaten $x^0 = ct, x^1 = x$, $x^2 = y, x^3 = z$, zusammengefasst im kontravarianten 4-Vektor x^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$, und einem Skalarprodukt $a \cdot b = a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$, worin $(g_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. Diesen Raum bezeichnet man als *Minkowski-Raum.*
Als homogene Lorentz-Gruppe bezeichnet man die linearen Transformationen $a^\mu \to a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu$, die das Skalarprodukt invariant lassen, d. h.

$$a' \cdot b' = (\Lambda a) \cdot (\Lambda b) = (\Lambda_\mu{}^\lambda a_\lambda)(\Lambda^\mu{}_\nu b^\nu) = a \cdot b\,. \tag{1}$$

(a) Wir untersuchen zunächst Lorentz-Transformationen, bei denen der zeitartige Basisvektor $\boldsymbol{e_0} = (1, 0, 0, 0)$ auf sich selbst abgebildet wird, $\Lambda \boldsymbol{e_0} = \boldsymbol{e_0}$. Argumentieren Sie, dass sich jede solche Transformation schreiben lässt als

$$\Lambda^\mu{}_\nu = (\mathcal{R}\mathcal{P}^k)^\mu{}_\nu\,, \tag{2}$$

wobei $\mathcal{P}$ die Matrix der Raumspiegelung, $k \in \{0, 1\}$ und

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \tag{3}$$

mit $R \in \mathrm{SO}(3)$ sei.

(b) Geben Sie $\mathcal{P}$ und $\mathcal{P}^2$ in Matrixdarstellung an und zeigen Sie, dass für die Matrix $\mathcal{T}$ der Zeitspiegelung gilt $\mathcal{T} = -\mathcal{P}$.

Im Folgenden wollen wir Lorentz-Boosts in x-Richtung betrachten, gegeben durch

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c & 0 & 0 \\ -\gamma v/c & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\,. \tag{4}$$

(c) Geben Sie t' und x' explizit an. Zeigen Sie, dass $\det \Lambda = 1$ und bestimmen Sie $\left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_\nu$.

(d) Zeigen Sie, dass man obige Transformation erhält als

$$\Lambda^\mu{}_\nu = [\exp(\eta K_x)]^\mu{}_\nu \tag{5}$$

worin $\eta = \operatorname{Artanh}\left(\frac{v}{c}\right)$ als *Rapidität* bezeichnet wird und

$$(K_x)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

die so genannte Erzeugende der Boosts in x-Richtung ist. Wie lassen sich $\cosh\eta$ und $\sinh\eta$ mit γ und v/c in Verbindung bringen? Wie sehen die Erzeugenden für Boosts in y- und z-Richtung aus?

Hinweis: Die Exponentialfunktion einer Matrix ist durch die Reihendarstellung definiert.

(e) Zeigen Sie, dass für zwei aufeinanderfolgende Boosts in x-Richtung die Rapidität additiv ist.

(f) Zeigen Sie, dass die Transformation für einen Lorentz-Boost im nichtrelativistischen Grenzfall $v \ll c$ in eine Galilei-Transformation übergeht.

Man kann zeigen, dass sich jede homogene Lorentz-Transformation schreiben lässt als

$$\Lambda = \operatorname{sign}(\Lambda^0{}_0)\,\Lambda_B(\boldsymbol{\eta})\,\mathcal{R}(\boldsymbol{\varphi})\,\mathcal{P}^k\,, \tag{7}$$

worin wieder $k \in \{0, 1\}$, $\mathcal{R}(\boldsymbol{\varphi})$ eine Drehung mit Drehvektor $\boldsymbol{\varphi}$ ist (siehe (3)), und $\Lambda_B(\boldsymbol{\eta})$ ein Boost in Richtung $\boldsymbol{\eta}$ mit Rapidität $|\boldsymbol{\eta}|$ ist.

(g) Drücken Sie diese Formel in Worten aus. Wie viele Erzeugende hat demzufolge die homogene Lorentz-Gruppe?

S 43 Additionstheorem für Geschwindigkeiten, Längenkontraktion

(4 + 4 Punkte)

Eine Streife der Polizei stehe im Ursprung des Inertialsystems I (Koordinaten: t, x, y) im verkehrsberuhigten Bereich (Schrittgeschwindigkeit!) am Milchstraßenrand. Zum Zeitpunkt $t = 0$ rase ein Raumzeitschiff mit $v = \frac{3}{4}\,c$ in x-Richtung vorbei. Die Ordnungshüter nehmen sofort die Verfolgung auf. Ihr Dienstschiff kann aber maximal die halbe Lichtgeschwindigkeit erreichen. Das Ruhesystem des Polizeischiffs auf Verfolgungsjagd sei I' (Koordinaten: t', x', y').
Hinweis: Vernachlässigen Sie alle Beschleunigungsphasen.

(a) Die Beamten erwägen den Einsatz ihrer Dienstwaffe, deren Geschosse mit einer Mündungsgeschwindigkeit von $v = \frac{1}{3}\,c$ austreten. Können diese Projektile ihr Ziel erreichen? Leiten Sie hierzu das Additionstheorem für Geschwindigkeiten her. Betrachten Sie auch eine Welt mit Galilei-Invarianz.

(b) (optional, +4 Punkte)

Um sicherzugehen, die Verkehrssünder zu stellen, beschließen die Beamten, Verstärkung zu rufen. Zum Zeitpunkt $t' = 0$, zu dem das Polizeischiff die Verfolgung aufnimmt, befinde sich bei $(x', y') = (\Delta x', -\Delta y')$, wobei $\Delta x', \Delta y' > 0$ gelte, ein baugleiches Streifenschiff des galaktischen Grenzschutzes. (Dieses Raumzeitschiff ruhe im Inertialsystem I.) Die Polizeibeamten bitten es per Funk (!) um Hilfe bei der Verfolgung. Die Grenzschützer beginnen sofort bei Erhalt der Nachricht mit Maximalgeschwindigkeit in die y-Richtung (des Inertialsystems I) zu fliegen.

Wie groß darf $\Delta y'$ maximal sein, damit der galaktische Grenzschutz die Verbrecher noch abfangen kann?

P 44 Lorentz-Transformation und Kausalität (+5 Punkte)

Wir betrachten in einem Inertialsystem I zwei Ereignisse $E_0 = (ct_0, \boldsymbol{x}_0)$ und $E = (ct, \boldsymbol{x})$. Der invariante Abstand s zwischen diesen Ereignissen ist definiert durch die Gleichung $s^2 = c^2(t - t_0)^2 - (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^2$. Im Folgenden sei $E_0 = (0, \mathbf{0})$. Außerdem wollen wir uns auf eine Raumdimension beschränken.

(a) Skizzieren Sie in einem Raum-Zeit-Diagramm die Bereiche

$$s^2 \begin{cases} > 0\,, & \text{zeitartiger Bereich,} \\ = 0\,, & \text{lichtartiger Bereich,} \\ < 0\,, & \text{raumartiger Bereich.} \end{cases} \tag{8}$$

Bestimmen Sie den so genannten kausalen Bereich, d. h. die Menge der Ereignispunkte, die wir durch unser Zutun beeinflussen können.

(b) Überprüfen Sie am Beispiel eines Boosts, dass s^2 eine Invariante unter Lorentztransformationen ist.

Wir nehmen nun an, dass die Ereignisse E_0 und E in I gleichzeitig sind, d. h. $E_0 = (0, 0)$ und $E = (0, a)$. Zeigen Sie:

(c) Der invariante Abstand der beiden Ereignisse ist in allen Inertialsystemen raumartig. Der räumliche Abstand kann in anderen Inertialsystemen I' Werte zwischen a und ∞ annehmen.

(d) Der zeitliche Abstand in I' kann beliebige Werte annehmen. Wie muss man die Geschwindigkeit v wählen, damit man in I' einen vorgegebenen zeitlichen Abstand $\delta t'$ misst? Insbesondere hängt also die zeitliche Reihenfolge der Ereignisse vom gewählten Inertialsystem ab. Was bedeutet dieses Ergebnis für den kausalen Zusammenhang von Ereignissen?

S 45 Zeitdilatation und Myonzerfall (4 Punkte)

Der energiereiche Teil der sekundären kosmischen Strahlung besteht hauptsächlich aus schnellen Myonen mit einer Geschwindigkeit von etwa $v_L = 0{,}98\,c$. Ohne Zeitdilatation wäre ihre Chance, bis zur Erdoberfläche zu gelangen, nur sehr gering, denn ruhende Myonen haben eine charakteristische Lebensdauer von nur $\tau_0 = 2{,}2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{sec}$.
Betrachten Sie als einfaches Modell vom erdfesten Labor aus einen Strom von Myonen, der aus einer Höhe von $h = 3\,\mathrm{km}$ mit konstanter Geschwindigkeit senkrecht auf die Erdoberfläche niedergeht, und berechnen Sie das Verhältnis I_0/I_h der Intensität des Stromes an der Erdoberfläche und der Intensität in der Höhe h unter der Annahme, dass unterwegs außer durch den spontanen Zerfall keine Myonen verloren gehen.

Weitere Informationen unter:
http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/ed13.html