
10. ÜBUNG ZUR QUANTENMECHANIK

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: 22.06.2010
Besprechung der Präsenzaufgaben: 17./18.06.2010

P 33 Drehimpulsalgebra II (3 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, daß der Drehimpulsoperator mit dem Quadrat des Impulsoperators und mit dem Quadrat des Ortsoperators kommutiert, $[\mathbf{L}_k, \vec{\mathbf{P}}^2] = 0$ und $[\mathbf{L}_k, \vec{\mathbf{Q}}^2] = 0$.
- (b) Berechnen Sie $(\mathbf{L}_1^2 + \mathbf{L}_2^2) Y_{lm}$.

S 34 Drehimpuls und Darstellung der Drehgruppe (5 Punkte)

Wir betrachten die Gruppe $SO(3)$ der Drehungen in drei Dimensionen. Für eine Drehung $R \in SO(3)$ gilt $\det(R) = 1$ und $R^T R = \mathbf{1}$. Bezeichne $R_{\vec{\omega}}$ mit $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ die Matrix einer Drehung mit dem Drehwinkel $|\vec{\omega}|$ und der Drehachse $\vec{\omega}/|\vec{\omega}|$.

- (a) Geben Sie die Matrix für eine Drehung um die x_3 -Achse mit dem Drehwinkel α an.

Eine unitäre Darstellung D der Drehgruppe auf dem Hilbertraum \mathcal{H} der quantenmechanischen Zuständen $|\psi\rangle$ kann im Ortsraum definiert werden durch

$$D(R_{\vec{\omega}})\psi(\vec{x}) = \psi(R_{\vec{\omega}}^{-1}\vec{x}) \quad (1)$$

für $R_{\vec{\omega}} \in SO(3)$.

- (b) Zeigen Sie die sog. Darstellungseigenschaft

$$D(R_{\vec{\omega}_1} \cdot R_{\vec{\omega}_2}) = D(R_{\vec{\omega}_1})D(R_{\vec{\omega}_2}). \quad (2)$$

- (c) Man kann allgemein zeigen

$$D(R_{\vec{\omega}}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{\omega} \cdot \vec{\mathbf{L}}\right), \quad (3)$$

d. h. die Komponenten des Drehimpulsoperators $\vec{\mathbf{L}}$ sind gerade die Generatoren der Drehungen auf den quantenmechanischen Zuständen. Überprüfen Sie diesen Zusammenhang für den Fall einer Drehung um die x_3 -Achse.

Hinweis: Wählen Sie geeignete Koordinaten und ein geeignetes Funktionensystem.

- (d) Zeigen Sie, daß die Abbildung $D(R_{\vec{\omega}})$ unitär ist.

S 35 Herleitung der Pauli-Matrizen

(optional, +5 Punkte)

Wir wollen die bekannte Form der Pauli-Matrizen für den Drehimpuls $j = 1/2$ aus den allgemeinen Eigenschaften des Drehimpulsoperators $\vec{\mathbf{J}}$ herleiten. Wir betrachten die Zustände $|\phi_j^m\rangle$, die Eigenzustände zu $\vec{\mathbf{J}}^2$ und \mathbf{J}_3 sind,

$$\vec{\mathbf{J}}^2 |\phi_j^m\rangle = j(j+1)\hbar^2 |\phi_j^m\rangle \quad (4)$$

$$\mathbf{J}_3 |\phi_j^m\rangle = m\hbar |\phi_j^m\rangle. \quad (5)$$

Für die Operatoren $\mathbf{J}_\pm = \mathbf{J}_1 \pm i\mathbf{J}_2$ gilt

$$\mathbf{J}_+ |\phi_j^m\rangle = \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\hbar |\phi_j^{m+1}\rangle \quad (6)$$

$$\mathbf{J}_- |\phi_j^m\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\hbar |\phi_j^{m-1}\rangle. \quad (7)$$

Für den Drehimpuls $j = 1/2$ kann m die Werte $-1/2$ und $+1/2$ annehmen. Wir identifizieren

$$\left| \phi_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left| \phi_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Für den Fall $j = 1/2$ schreibt man üblicherweise $\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{S}} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$. Leiten Sie aus den obigen Bedingungen (5)-(7) die explizite Darstellung der Pauli-Matrizen σ_i her.

S 36 Sphärischer Potentialtopf

(7+3 Punkte)

Wir wollen den dreidimensionalen sphärischen Potentialtopf unendlicher Tiefe untersuchen. Das Potential ist also mit $R > 0$

$$V(|\vec{x}|) = \begin{cases} 0 & \text{für } |\vec{x}| < R \\ \infty & \text{für } R \leq |\vec{x}|. \end{cases} \quad (9)$$

Wir wollen im folgenden Energieeigenwerte $E > 0$ und zugehörige Eigenfunktionen bestimmen.

- Geben Sie den Hamiltonoperator für die Bewegung eines Teilchens der Masse m in diesem Potentialtopf an.
- Setzen Sie die Lösung im Ortsraum unter Verwendung von Kugelkoordinaten an als

$$\psi(r, \vartheta, \phi) = f_l(r)Y_{lm}(\vartheta, \phi). \quad (10)$$

Sei $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$. Zeigen Sie, daß der obige Ansatz eine Lösung der Energieeigenwertgleichung ist, falls $g_l(z) = f_l(r/k)$ der Differentialgleichung

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{2}{z} \frac{d}{dz} - \frac{l(l+1)}{z^2} + 1 \right] g_l(z) = 0 \quad (11)$$

genügt. Diese Differentialgleichung ist als (sphärische) Besselsche Differentialgleichung bekannt. Ihre Lösungen sind die (sphärischen) Bessel-Funktionen $j_l(z)$ und Neumann-Funktionen $n_l(z)$.

(c) Zeigen Sie, daß die Funktionen

$$j_0(z) = \frac{\sin z}{z} \quad \text{und} \quad n_0(z) = \frac{\cos z}{z} \quad (12)$$

Lösungen der Differentialgleichung (11) für $l = 0$ sind.

(d) Zeigen Sie, daß j_0 im Ursprung regulär ist und daß n_0 im Ursprung nicht regulär ist. Warum muß die Lösung n_0 bei unserem Problem ausgeschlossen werden?

(e) Finden Sie die möglichen Energiewerte E für den Fall $l = 0$. Verwenden sie hierbei ausschließlich die Lösung j_0 .

(f) (optional) (+3 Punkte)
Zeigen Sie, daß

$$j_1(z) = \frac{1}{z}j_0(z) - n_0(z) \quad \text{und} \quad n_1(z) = \frac{1}{z}n_0(z) + j_0(z) \quad (13)$$

die Differentialgleichung (11) für $l = 1$ lösen. Zeigen Sie, daß j_1 im Gegensatz zu n_1 regulär im Ursprung ist. Finden Sie für $l = 1$ eine Bedingung für die möglichen Energieeigenwerte.

S 37 Lenzscher Vektor (optional, +6 Punkte)

Im klassischen Kepler-Problem gibt es eine Erhaltungsgröße, die als Lenzscher Vektor bekannt ist. Man kann ein quantenmechanisches Analogon $\vec{\mathbf{F}}$ zum Lenzschen Vektor definieren mit den Komponenten

$$\mathbf{F}_j = \frac{1}{2m} \sum_{k,l} \epsilon_{jkl} (\mathbf{P}_k \mathbf{L}_l - \mathbf{L}_k \mathbf{P}_l) - \frac{Ze_0^2}{|\vec{\mathbf{Q}}|} \mathbf{Q}_j. \quad (14)$$

Zeigen Sie, daß die Komponenten von $\vec{\mathbf{F}}$ mit dem Hamiltonoperator \mathbf{H} des Coulomb-Problems

$$\mathbf{H} = \frac{\vec{\mathbf{P}}^2}{2m} - \frac{Ze_0^2}{|\vec{\mathbf{Q}}|} \quad (15)$$

kommutieren, $[\mathbf{F}_i, \mathbf{H}] = 0$.

S 38 Umlaufzahl und Polarwinkelform (5 Punkte)

Wir wollen im zweidimensionalen Raum \mathbb{R}^2 das Vektorfeld

$$\vec{A}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \quad (16)$$

betrachten.

(a) Zeigen Sie, daß

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} = \frac{\partial A_2}{\partial x} \quad (17)$$

und $\vec{A} = \vec{\nabla} f(x, y)$ mit $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

(b) Man kann zeigen, daß für jede geschlossene Kurve C

$$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{s} = 2\pi n, \quad (18)$$

wobei $n \in \mathbb{Z}$ die Umlaufzahl des Weges C um den Ursprung bezeichnet. Überprüfen Sie dies an Beispielen (etwa für geeignete Kreiswege).

Bemerkung: Wegen dieses Resultats wird $\theta = \vec{A} \cdot d\vec{s}$ als Polarwinkelform bezeichnet. In der nächsten Übung werden wir sehen, daß diese in der Quantenmechanik eine wichtige Anwendung beim Aharonov-Bohm-Effekt findet.

Weitere Informationen unter:

<http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~ewerz/qm10.html>